



UMA INTRODUÇÃO À GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Egina Lima Martins¹
João Francisco Da Silva Filho²
Rafael Jorge Pontes Diogenes³

RESUMO

A Geometria existe praticamente desde os primórdios da civilização. No entanto, na Grécia Antiga temos a primeira compilação de "toda" (ou quase toda) a geometria conhecida até aquele momento, devido a Euclides de Alexandria, que escreveu "Os Elementos". Mas foi apenas com o surgimento das universidades europeias que a Geometria Euclidiana ganhou reconhecimento pela sua importância na construção civil e como uma forma de treinar a mente. Contudo, séculos mais tarde, o debate em torno do quinto postulado de Euclides abriu caminho para novas concepções, o que culminou no surgimento da geometria não euclidiana, mais precisamente a geometria hiperbólica desenvolvida de maneira independente por Gauss, Bolyai e Lobachevsky. Isso trouxe profundas transformações na forma de compreender o espaço e as estruturas matemáticas. O objetivo deste trabalho é estudar a Geometria Hiperbólica em dimensão 2, contemplando a análise das retas ambientes, bem como as propriedades métricas e as simetrias dos objetos geométricos. O percurso metodológico consistiu na compreensão da história do desenvolvimento das geometrias não euclidianas, juntamente com a construção axiomática da geometria hiperbólica, seguida de um estudo analítico que permitiu o desenvolvimento de uma "noção bem básica" da geometria riemanniana, com uma abordagem matricial. Além disso, durante o desenvolvimento dessas etapas houve o uso do GeoGebra e do Software de Geometria Interativa Cinderela como ferramentas de visualização. Os resultados evidenciam o desenvolvimento da Geometria Hiperbólica ao longo do tempo, destacando conceitos e resultados axiomáticos, como as propriedades de congruência, a soma dos ângulos internos de um triângulo e a variação da distância entre retas. Além disso, foi possível observar a riqueza de simetrias dessa geometria por meio de modelos hiperbólicos munidos pela métrica riemanniana. Ressalta-se também a utilização do GeoGebra como ferramenta de visualização, a qual favoreceu uma melhor compreensão de uma geometria que, em muitos aspectos, distancia-se do senso comum ligado à tradição euclidiana. Conclui-se que a análise dos conceitos e resultados ligados a paralelismo, pontos ideais, triângulos generalizados, triângulos ordinários, polígonos, horocírculos, curvas equidistantes e áreas proporcionaram uma compreensão dos conceitos de grupos, subgrupos, métricas, espaço hiperbólico, geodésicas e isometrias. Isso evidencia a independência do postulado das paralelas e justifica modelos de representação que revelam a riqueza de suas simetrias e aplicações. Agradeço à Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap) pelo financiamento da pesquisa intitulada Uma Introdução às geometrias não Euclidianas, executada entre 01/09/2024 e 31/08/2025, por meio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (Pibic) e Tecnológica (Pibiti), da Unilab.

AGUSTINI, Edson. Introdução à geometria hiperbólica plana. Uberlândia: FAMAT UFU; CEAd UFU, 2022. 144 p. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/25207>.

DORIA, Celso Melchhiades. Geometrias: Euclidiana, Esférica e Hiperbólica. Rio de Janeiro: SBM, 2019. ISBN 9788583371540.

Palavras-chave: Geometria Não-Euclidiana; Disco de Poincaré; Geometria Hiperbólica.

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Discente, emlima@aluno.unilab.edu.br¹

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Docente, joaofilho@unilab.edu.br²

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Docente, rafaeldiogenes@unilab.edu.br³