



UM RESULTADO DE EXISTÊNCIA E REGULARIDADE PARA A EQUAÇÃO DE POISSON

Gabriel Kayky Bandeira Pereira¹
Marcelo Dário Dos Santos Amaral²

RESUMO

O tema de equações diferenciais parciais (EDPs) é desafiador para um aluno de graduação uma vez que costuma ser estudado em pós-graduação. A introdução é feita através do estudo do operador Laplaciano. O estudo do operador Laplaciano serve como uma referência para diversas outras EDPs. Precisamos ver vários resultados preliminares assim como terminologia e provamos um teorema de existência e regularidade para o problema de Poisson para o operador Laplaciano. Aqui estudamos a clássica teoria das funções harmônicas. Com o objetivo de introduzir os conceitos mais avançados da matemática, para expandir os conhecimentos familiarizar com conteúdos expostos. Encontraremos as mais importantes ferramentas e conjunto de ideias da teoria de Equações Diferenciais Parciais no cenário mais fácil possível para que um aluno iniciante aprenda. Entre elas podemos citar: Solução Fundamental, funções de Green, questões de existência e regularidade entre outros. Além disso, será introduzido os conceitos básicos do programa LaTeX, para que o aluno consiga escrever artigos matemáticos com mais facilidade.

Palavras-chave: EDPs; Laplaciano; Solução Fundamental; Latéx.

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB), Unidade acadêmica dos Palmares, Discente, gabrielkbp@gmail.com¹

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB), Unidade acadêmica dos Palmares, Docente, marceloamaral@unilab.edu.br²



INTRODUÇÃO

Equações Diferenciais Parciais (EDP) é um ramo há muito solidificado e valorizado na matemática atual. Entre as muitas provas e evidências para este fato está que entre os últimos ganhadores da "medalha fields", maior láurea na área da matemática, considerada o nobel da matemática, encontra-se um EDPista chamado Alessio Figalli. Equações Diferenciais Parciais trata de encontrar (problemas de existência) cujas soluções são funções de uma equação que envolva derivadas parciais das várias variáveis envolvidas. Além de resolver a equação temos os problemas de regularidade. Regularidade é um termo "pega-tudo" em matemática. O que queremos dizer é que se refere à diversas propriedades de comportamento do gráfico de uma função, as mais comuns são: módulos de continuidade da função e de suas derivadas parciais de várias ordens.

A teoria das funções harmônicas tem papel central em EDP's. Com efeito, ela é uma equações protótipo para os mais variados tipos de equações e métodos de solução. Com efeito, o Laplaciano é arquétipo para equações na forma divergente e não-divergente, lineares e não-lineares tais como equações totalmente não lineares. Não seria exagero dizer que do Laplaciano seguem (se não todas) quase todas as generalizações de tipos de equações tais como equações elípticas e parabólicas (do tipo evolução) e equações singulares e degenerados tais como o p-Laplaciano e o infinito Laplaciano. Entre os objetivos do ponto de vista matemático, podemos citar: introdução ao rico e valorizado ramo das Equações Diferenciais Parciais, acreditamos que esta é melhor forma de se fazer isto, trazer o contato com a língua inglesa (considerada por muitos a língua universal) através de clássicas referências da área pois acreditamos que o domínio do inglês deixou de ser um incremento adicional e passou a ser fundamental. Entre os objetivos gerais podemos destacar a inserção à pesquisa científica, formação de recursos humanos e desenvolvimento da ciência como um todo (mesmo que um tanto quanto indiretamente, à princípio).

METODOLOGIA

A referência básica utilizada foi o clássico livro Evans Partial Differential, por ser escrito em inglês ao mesmo tempo que guiou do ponto de vista matemático, ajudou com a aquisição da língua estrangeira. Outras clássicas referências em inglês também serão propostas. Estudamos também o programa de computação chamado LaTeX. O qual é imprescindível nos dias de hoje para se divulgar pesquisa em matemática e afins. O LaTeX é um programa que propicia caracteres específicos matemáticos os mais variados, além de diversos recursos de escrita e gráficos. Materiais que possam auxiliar o estudante podem ser facilmente encontrados na internet. Como objetivo principal, tivemos a demonstração do teorema da existência e regularidade das equações de Poisson. Partimos primeiramente do cálculo do Laplaciano, que é a soma das derivadas segunda de uma função composta, logo em seguida, os cálculos do gradiente e da hessiano da função encontrada e depois seguimos para a demonstração do teorema.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Através da leitura e discussão do livro Partial Differential Equations de Lawrence C. Evans, fui introduzido aos conceitos essenciais das EDPs. O conteúdo do livro proporcionou uma base sólida que facilitou a compreensão de tópicos avançados, como o Laplaciano e suas generalizações. A compreensão das Equações Diferenciais Parciais (EDP) representa um marco importante na formação matemática, tanto do ponto de vista teórico quanto prático. Ao longo da pesquisa, foram abordados diversos aspectos fundamentais, incluindo a teoria das funções harmônicas e a análise das propriedades de regularidade das soluções das



EDPs. Com a demonstração do teorema proposto, tivemos como resultados que, sob as condições de que a função u é duas vezes continuamente diferenciável em toda a dimensão n e que a equação diferencial associada, envolvendo o operador Laplaciano, é igual a uma função f definida em todo o espaço n -dimensional, a função u se revela uma solução suave da equação. Além disso, a regularidade da solução é assegurada em função da regularidade da função f . Esses resultados têm implicações significativas em problemas físicos e de engenharia, onde se busca entender o comportamento de soluções de equações diferenciais parciais em domínios não restritos.

CONCLUSÕES

Em suma, a proposta de estudo das Equações Diferenciais Parciais não apenas introduziu a um campo matemático complexo e fascinante, mas também proporcionou um aprendizado multidisciplinar, envolvendo a língua inglesa, habilidades computacionais e da escrita acadêmica. A integração desses elementos não apenas enriqueceu o aprendizado, mas também me preparou para os desafios futuros, seja na graduação, mestrado, doutorado ou na aplicação na hora de ministrar as aulas como um futuro professor de matemática. Estou confiante que impacto positivo dessa formação será sentido em minha trajetória acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Unilab pelo financiamento da pesquisa intitulada "Hölder Regularidade de Gradientes de soluções fracas de problemas elípticos e parabólicos para generalizações do problema de Poisson" e executada entre 01/10/2023 e 30/09/2024, através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (Pibic) e Tecnológica (Pibiti).

REFERÊNCIAS

1. HAN, Qing; LIN, Fanghua. Partial differential equations. Courant Lecture Notes in Mathematics: American Mathematical Society, 2011.
2. EVANS, Lawrence Craig. Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics: American Mathematical Society, 2010.
3. GILBARG, David; TRUDINGER, Neil. Elliptic partial differential equations of second order. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften: American Mathematical Society, 1983.
4. OETIKER, Tobias et al. Uma não tão pequena introdução ao LATEX 2ε. [S. l.], 2007. Disponível em: http://www.ptep-online.com/ctan/lshort_port.pdf. Acesso em: 29 jan. 2019.
5. SOUTO, Gilberto. Curso de LATEX. [S. l.], 2007. Disponível em: http://www.uft.edu.br/engambiental/prof/catalunha/arquivos/latex/latex_GilbertoSouto.pdf. Acesso em: 29 jan. 2019.
6. SODRÉ, Ulysses. LA TEX para Matemática com o TeXnicCenter. [S. l.], 2006. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/latexmat.pdf>. Acesso em: 29 jan. 2019.