

ALGUNS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO EM GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

Jefferson De Araújo Silva¹
Rafael Diógenes²

RESUMO

Este trabalho se propõe a estudar alguns problemas de otimização em Geometria que utilize apenas os conhecimentos do ensino médio e/ou, no máximo, noções de cálculo diferencial e integral. São abordados problemas clássicos, como encontrar a curva de menor distância entre dois pontos no espaço euclidiano, caso particular do problema de encontrar a curva que minimiza distâncias em superfícies, as geodésicas; o problema da braquistócrona que busca encontrar a curva que minimiza o tempo de queda de um corpo sujeito apenas à força da gravidade; e o problema isoperimétrico adaptado para polígonos, ou seja, de determinar a o polígono com maior área entre os polígonos de mesmo lado com perímetro fixo. O objetivo principal é oportunizar alunos de ensino médio acesso a problemas clássicos de geometria diferencial de curvas e superfícies. Enquanto a metodologia é a abordagem clássica de leitura da literatura disponível e consequente solução, sempre buscando o uso do Geogebra ou materiais físicos para melhor visualização do resultado.

Palavras-chave: otimização; menor distância; braquistócrona; problema isoperimétrico.

EEMTI Doutor Brunilo Jacó, 2o ano, Discente, jeffersonujosilva@gmail.com¹
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Docente, rafaeldiogenes@unilab.edu.br²



INTRODUÇÃO

Neste trabalho estuda-se alguns problemas de otimização em Geometria que utilize apenas os conhecimentos do ensino médio e/ou no máximo noções de cálculo diferencial e integral. Otimização é o processo de tornar ótimo certas situações ou problemas é procurar os seus máximos ou mínimos a depender da situação, ou seja, dado um certo problema qual seria a melhor solução dentre todas as alternativas.

Os problemas abordados aqui são alguns problemas clássicos de Geometria Diferencial, cuja soluções podem ser encontradas usando o Cálculo das Variações. No entanto, para uma abordagem no ensino médio, os problemas são modificados, de modo que se possa usar, praticamente, apenas conteúdos de ensino médio. A seguir é destacado os problemas.

A menor distância entre dois pontos

Sem dúvida esse é um dos problemas mais acessíveis ao estudante do ensino médio. O problema consiste em determinar a curva de menor comprimento ligando dois pontos (do plano ou do espaço) P e Q. Apenas com conteúdo de geometria analítica é possível mostrar que um segmento de reta é a solução do problema.

O problema da braquistócrona

De maneira geral esse problema se propõe a encontrar a curva que minimiza o tempo de queda de um corpo, entre dois pontos num plano vertical, liberado de um ponto inicial e sujeito apenas à força da gravidade. A solução desse problema é a curva conhecida como cicloide que pode ser parametrizada usando apenas conceitos básicos de geometria analítica e trigonometria.

O problema isoperimétrico

O problema isoperimétrico clássico no plano consiste em achar dentre todas as curvas que tem um comprimento fixo $L > 0$, aquela que engloba a maior área. A solução para este problema é o círculo. Esse problema aparece em escritos gregos de Zenódo e Pappus (LIMBERGER, 2011). Entretanto não se tem uma demonstração formal de que a circunferência é a curva que maximiza a área para um perímetro fixo, embora o resultado já fosse aceito. Segundo (LIMBERGER, 2011) apenas em 1870 Weierstrass deu uma demonstração formal para este fato.

Esse problema pode ser modificado para figuras geométricas, por exemplo, dentre todos os triângulos de perímetro fixo L, qual o que possui a maior área? Dentre todos os quadriláteros de perímetro fixo L, qual o que possui a maior área? Dentre todos os polígonos de n lados com perímetro fixo L, qual o que possui a maior área? A resposta para estas perguntas é exatamente os polígonos regulares. Para chegar a esta conclusão pode-se usar apenas argumentos do ensino básico.

METODOLOGIA

Inicialmente é estudado o problema da menor distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^2$ e depois em $\mathbb{R}^3$.



Posteriormente é estudado o problema da braquistócrona e por fim o problema isoperimétrico para polígonos na seguinte ordem: triângulos, quadriláteros e polígonos.

O modo de pesquisa em cada problema é o mesmo. Busca-se na literatura os materiais sobre o problema com suas possíveis soluções, entende-se a solução e busca-se compreender melhor com visualização no Geogebra, em outros materiais físicos ou ainda em vídeos explicativos dos problemas.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Todos os três problemas propostos foram estudados e entendidos suas soluções. A solução da menor distância entre dois pontos é o problema mais tranquilo de ser abordado e consequentemente foi o primeiro, sua solução é um segmento de reta ligando os dois pontos. Posteriormente, o problema isoperimétrico foi abordado para triângulos e quadriláteros. Ressalta-se que o problema melhor compreendido foi o problema do triângulo, cuja solução encontrada é um triângulo equilátero. Por fim, o problema da Braquistócrona que despertou uma curiosidade grande. Foi pesquisado, além dos materiais digitados, vídeos que mostram na prática que a curva Ciclóide é a solução procurada.

CONCLUSÕES

Todas as atividades planejadas foram realizadas, embora a ordem de estudo tenha sido ajustada devido à necessidade de dominar alguns conceitos antes de abordar a Braquistócrona. As principais dificuldades foram a falta de conhecimento prévio em integral e derivada, o que dificultou a compreensão inicial de certos tópicos. No entanto, essas dificuldades foram superadas com dedicação e estudo adicional. O bolsista considera ter alcançado sucesso no projeto, adquirindo um sólido conhecimento em geometria diferencial.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo financiamento da pesquisa intitulada PROBLEMAS CLÁSSICOS EM GEOMETRIA DIFERENCIAL COM MÉTODO DAS VARIAÇÕES e executada entre 01/09/2022 e 31/08/2023, através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (Pibic), Modalidade de Iniciação Científica Júnior (ICJ), da Unilab.

REFERÊNCIAS

LIMBERGER, R. Abordagens do problema isoperimétrico. Dissertação (Mestrado) Universidade Estadual de Campinas, 2011

LOMAS, F. Problemas isoperimétricos: uma abordagem no ensino médio. Dissertação de Mestrado PROFMAT. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação. Universidade de São Paulo, 2016.

PORTAL OBMEP. <https://portaldaobmep.impa.br/>, 2023.



TAGLIOLATTO, Ana Luísa Sader. Braquistócrona. 2015. Dissertação - (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2015. Disponível em: .