

CAMPO DE VETORES CONFORME FECHADO EM SUPERFÍCIES

Douglas Vieira Lima¹
Rafael Jorge Pontes Diógenes²

RESUMO

Este projeto tem por objetivo estudar as superfícies no espaço tridimensional que possuem campos de vetores conforme fechado. Um campo de vetores ξ em uma superfície S de $\mathbb{R}^3$ é dito como conforme fechado se a derivada covariante do campo conforme ξ na direção de qualquer campo Y resulta em um múltiplo de Y . O problema em questão concentra-se fortemente em descrever completamente todos os possíveis campos de vetores conforme fechado de uma superfície e, de maneira particular, trabalhando sobre as superfícies de revolução. Sabe-se que obter resultados de classificações ou caracterizações são problemas bastantes interessantes em geometria diferencial. Nesse sentido, ao estudar as estruturas que um campo de vetores conforme fechado nos oferece em relação as superfícies de revolução, bem como as equações diferenciais das funções que parametrizam a superfície, é obtido uma descrição completa do campo de vetores conforme fechado, além de algumas sequências de resultados possíveis de acordo com a característica da superfície de revolução ou do campo.

Palavras-chave: Campo de vetores; Conforme fechado; Superfícies.

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Discente, douglas_lima98@hotmail.com¹
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Docente, rafaeldiogenes@unilab.edu.br²

INTRODUÇÃO

Um campo de vetores $\xi \neq 0$ em $S \subset \mathbb{R}^3$ é dito conforme fechado se $D_Y \xi = \eta Y$, para todo Y pertencente a $X(S)$ (Espaço dos campos de vetores suaves de S), onde η é uma função suave em S chamada de fator conforme. Além disso, D_Y representa a derivada covariante na direção do campo Y , onde, é nada mais que a projeção sobre o plano tangente a S da derivada de campos de vetores.

Obter resultados de classificações ou caracterizações são problemas muito significativos em geometria diferencial. Dessa maneira, a proposta principal deste trabalho é estudar os campos de vetores conforme fechado em superfícies de revolução no $\mathbb{R}^3$, buscando obter a descrição completa do campo por meio de equações diferenciais e ordinárias. Esse tipo de problema já vem sendo estudado a vários anos por AMUR (1974), DESHMUKH (2008), OBATA (1970), TANNO e WEBER (1969) e TASHIRO (1965), onde os autores buscaram em geral caracterizar a esfera a partir de variedades com campo conforme.

Já diante dos estudos dos campos de vetores conforme fechado em superfícies de revolução, é trabalhado dentro do espaço Euclidiano tridimensional, podendo então usar da geometria diferencial e do espaço euclidiano para determinar ou caracterizar esses campos. Esse tipo de estudo não é tão comum dentro dessa área, pois ao contrário do objetivo referido acima, é feito um estudo para determinar como é o campo conforme fechado partindo de superfícies conhecidas, em especial, as superfícies de revolução.

Portanto, no caso das superfícies de revolução no $\mathbb{R}^3$, existem outros exemplos de campo além o da esfera? Se sim, são únicos? Como podemos descrevê-los? Tais indagações são as motivações para este estudo.

METODOLOGIA

A metodologia adotada neste projeto foi experimental, onde, partindo da hipótese do problema onde há a presença de campos de vetores conforme fechado em uma superfície de revolução, utilizamos a derivada covariante para encontrar as expressões para as derivadas parciais das funções componentes do campo em relação a uma base ortonormal diante as funções que parametrizam a superfície.

Em seguida, à partir dos resultados obtidos, fizemos o estudo das derivadas parciais de primeira e segunda ordem das funções componentes do campo e conseguimos determinar expressões para tais.

Por fim, manipulando as equações diferenciais encontradas, alcançamos alguns resultados muito importantes, onde pudemos, de fato, determinar os casos possíveis e, além disso, descrever o campo de vetores conforme fechado em cada caso sobre a superfície de revolução.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Graças aos estudos realizados durante o período de vigência deste trabalho, conseguimos alcançar resultados importantes, como a descrição completa de um campo de vetores conforme fechado, dada uma superfície de revolução arbitrária. Além disso, em consequência destes resultados, mostramos que quando a superfície de revolução tem curvatura Gaussiana K não constante, existe apenas um tipo de campo de vetores conforme fechado.

Vale destacar que os resultados alcançados neste trabalho não são encontrados na literatura de geometria diferencial no espaço Euclidiano, pois a base dos estudos usados nesta pesquisa eram encontradas somente dentro da Geometria Riemanniana e, ao desenvolver o projeto, conseguimos usar apenas da geometria diferencial no espaço Euclidiano para alcançar o objetivo principal, gerando então, grandes contribuições para essa área e facilitando a compreensão, com uma linguagem mais simplificada.

CONCLUSÕES

Este projeto me proporcionou um aprofundamento significativo na área da pesquisa científica na matemática, onde pude adquirir uma boa maturidade sobre os muitos conceitos na área de Geometria Diferencial. Além disso, é esperado que o trabalho realizado possa despertar o interesse de outras pessoas em relação a essa área do conhecimento, pois ainda existem muitos caminhos para se explorar na busca da caracterização de novos campos de vetores conforme fechado nos demais tipos de superfícies, por exemplo, a superfície regrada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira.

Ao meu orientador Rafael Jorge Pontes Diógenes, pela oportunidade concedida na pesquisa de Iniciação Científica.

Ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica e Tecnológica (BICT) da Funcap, pela bolsa de estudos que possibilitou a dedicação no projeto e a operacionalização dos estudos.

REFERÊNCIAS

- AMUR, K. Conformality of Riemannian manifolds to spheres. J. Diff. Geom. 9, 571-576, 1974.
- CARMO, M. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção Textos Universitários).
- DESHMUNKH, S. Conformal gradient vector fields on a compact Riemannian manifold. Colloquium Math. 112 (1), 157-161, 2008.
- OBATA, M. Conformal transformations of Riemannian manifolds. J. Diff. Geom. 4, 311-333, 1970.
- TANNO, S.; WEBER, W. Closed conformal vector fields. J. Diff. Geom. 3, 361-366, 1969.
- TASHIRO, Y. Complete Riemannian manifolds and some vector fields. Trans. Am. Math. Soc. 117, 251-275, 1965.
- TENENBLAT, K. Introdução à geometria diferencial. São Paulo: Blucher, 2008.