

CURVAS NO ESPAÇO EUCLIDIANO R^3 E O TEOREMA FUNDAMENTAL

Antonia Luciana Alves De Araújo¹
João Francisco Da Silva Filho²

RESUMO

No presente trabalho, estuda-se as curvas parametrizadas diferenciáveis no espaço Euclidiano R^3 , com destaque para as curvas regulares e dando uma atenção especial à representação gráfica, através do uso de alguns softwares Matemáticos, tais como Geogebra e o Winplot. As curvas parametrizadas diferenciáveis são aplicações suaves definidas num intervalo aberto dos números reais e que tomam valores no espaço Euclidiano R^3 . Dentre as curvas parametrizadas diferenciáveis, destacam-se as curvas parametrizadas regulares, que correspondem às curvas parametrizadas diferenciáveis, cujo vetor tangente (ou vetor velocidade) está bem definido para todo valor do parâmetro da curva. Na perspectiva de facilitar a abordagem dos conceitos de curvatura e torção, prioriza-se a parametrização pelo comprimento de arco no estudo das noções de vetor normal, vetor binormal e o vetor tangente, que constituem o Triedro de Frenet. Por último, chega-se ao Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas, que nos garante que o comportamento local de uma curva parametrizada regular pode ser completamente descrito pela curvatura e pela torção.

Palavras-chave: Curvas Parametrizadas Diferenciáveis Curvas Parametrizadas Regulares Triedro de Frenet Teorema Fundamental .

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Terra , Discente, la408024@gmail.com¹
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituição de Ciências Exatas e da Terra, Docente, joaofilho@unilab.edu.br²



INTRODUÇÃO

Conforme já mencionado no Resumo, uma curva parametrizada diferenciável é uma aplicação diferenciável definida sobre um intervalo aberto dos números reais e que assume valores no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$. Dentre as curvas parametrizadas diferenciáveis, destacam-se as curvas parametrizadas regulares ou simplesmente, curvas regulares, que correspondem às curvas parametrizadas diferenciáveis que possuem o vetor tangente bem definido para todos os valores do parâmetro.

Dentre os conceitos associados às curvas regulares, estão vetor tangente unitário, vetor normal unitário e vetor binormal unitário (ou simplesmente, vetores tangente, normal e binormal), que constituem o Triedro de Frenet. O triedro de Frenet está intimamente relacionado às noções de curvatura e torção de uma curva regular, que segundo o Teorema Fundamental da Teoria local das Curvas, descrevem completamente o comportamento local da curva.

Além do estudo teórico mencionado anteriormente, procurou-se abordar a utilização das tecnologias digitais através de softwares Matemáticos, tais como Geogebra e Winplot na representação gráfica de curvas regulares e suas estruturas geométricas, bem como o formato LaTeX, que contribui de forma significativa para a produção de materiais que podem ser utilizados posteriormente por discentes e docentes do Curso de Licenciatura em Matemática.

METODOLOGIA

No primeiro semestre de vigência do Projeto de Pesquisa, iniciado em outubro de 2019, realizou-se uma revisão bibliográfica para a aquisição dos pré-requisitos necessários ao estudo das curvas parametrizadas diferenciáveis no espaço Euclidiano de dimensão três e o Teorema Fundamental. Na sequência, foram estudados livros de Cálculo Diferencial, Análise Matemática e Geometria Diferencial para adquirir as noções mais básicas relacionadas a aplicações diferenciáveis, antecedendo o estudo de curvas parametrizadas diferenciáveis e curvas regulares. De forma concomitante, realizou-se ainda a ambientação com softwares Matemáticos, na perspectiva de representar graficamente curvas planas e espaciais.

No segundo semestre do projeto, foram estudadas as curvas parametrizadas diferenciáveis com destaques para as curvas regulares, nas quais foi possível introduzir as noções de tangente, normal, binormal, triedro de Frenet, curvatura e torção, culminado com o Teorema Fundamental. Em diversos momentos, foi necessário restringir o estudo às curvas diferenciáveis parametrizadas pelo comprimento de arco, embora esse estudo contemple todos os casos possíveis, visto que toda curva diferenciável pode ser parametrizada pelo comprimento de arco.

Convém ressaltar que ao longo do projeto foram realizadas reuniões periódicas (presenciais e virtuais) com o orientador para acompanhamento das atividades, esclarecimento de dúvidas, discussões sobre o conteúdo estudado e apresentações do conteúdo estudado através de exposições orais, resolução de exercícios, bem como elaboração de frequências mensais e relatórios (parcial e final).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Diante do estudo realizado sobre curvas parametrizadas regulares, incluindo vetores tangente unitário, normal unitário, binormal unitário, triedro de Frenet, curvatura e torção, foi possível relacionar esses



conceitos através das equações de Frenet e compreender o Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas, que mostra que o comportamento local de curvas regulares pode ser completamente descrito pela curvatura e pela torção. Para além disso, foi utilizado o software Geogebra para ilustrar graficamente alguns desses conceitos, através de um arquivo, desenvolvido pelo colaborador do projeto Rafael Jorge Pontes Diogenes, que explicita os vetores tangente unitário, normal unitário, binormal unitário (triedro de Frenet), assim como uma interpretação geométrica dinâmica para a curvatura de curvas regulares.

CONCLUSÕES

Depois de concluído o trabalho, foi possível compreender a importância do estudo das curvas parametrizadas regulares e o Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas, bem como das noções de vetores tangente unitário, normal unitário e binormal unitário, curvatura e torção, devido à riqueza de propriedades geométricas presentes e a possibilidade de usar curvas parametrizadas diferenciáveis na descrição de fenômenos físicos. Por fim, ressalta-se a importância da ilustração gráfica produzida pelo professor Rafael Jorge Pontes Diogenes, colaborador do projeto, fornecendo um recurso didático muito útil para discentes e docentes no estudo da Geometria Diferencial de Curvas, que nos permite compreender melhor as propriedades e o comportamento das curvas regulares, através do Triedro de Frenet e as notações de curvatura e torção.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, primeiramente a Deus por todas conquistas e pela sabedoria, ao professor e orientador João Francisco da Silva Filho pela paciência e pelos ensinamentos, ao professor Rafael Jorge Pontes Diógenes pelas contribuições no decorrer do projeto, ao Programa Pibic-Unilab pela oportunidade e pela concessão da bolsa e todos que contribuíram durante o percurso do projeto.

REFERÊNCIAS

- ALENCAR, H.; SANTOS, W. Introdução às Curvas Planas. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- BOYCE, W. E.; DI PRIMA, R. C. Equações Diferenciais e Problemas de Valores de Contorno. 10. ed. Rio de Janeiro: Guanaba Koogan, 2015.
- CARMO, M. P. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- CARMO, M. P. Geometria Riemanniana. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. Equações Diferenciais Aplicadas, 3ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- GEOGEBRA (http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/).
- GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo - Volume 1. 5. ed. São Paulo: LTC, 2011.
- GUIDORIZZI, H. L. Curso de Cálculo - Volume 3. 5. ed. São Paulo: LTC, 2011.
- LEE, J. M. Introduction to smooth manifolds. New York: Springer-Verlag, 2002.



LIMA, E. L. Análise Real - Volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 2. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

MATHEMATICA 9 (<http://www.wolfram.com/mathematica/new-in-9/>).

MIKTEX PROJECT (miktex.org).

SOTOMAYOR, J. Lições de Equações Diferenciais Ordinárias. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

TENENBLAT, K. Introdução à G. Diferencial. 2. ed. Brasília: UNB, 2008.

TEXMAKER (<http://www.xmlmath.net/texmaker/>).

